**ÔN TẬP TỨ GIÁC NỘI TIẾP**

**A. Lý thuyết**

**1. Định nghĩa:** Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó

- Trong hình vẽ ta có  nội tiếp đường tròn (O) và (O) ngoại tiếp ****

**2. Các tính chất:** Cho  nội tiếp đường tròn (O), khi đó:

- Tổng số đo hai góc đối diện bằng 



- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng  thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.  
**3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp**

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 

- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện

- Tứ giác có bốn đỉnh cách đều 1 điểm cố định (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác

- Tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc 

\*) Chú ý: Trong các hình đã học thì hình chữ nhật, hình vuông và hình thang cân nội tiếp được đường tròn

**B. Bài tập**

**Bài 1:** Cho tam giác có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt (O) lần lượt tại M, N, P, kẻ đường kính AK, I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a.  nội tiếp và ba điểm H, I, K thẳng hàng

b. Chứng minh tứ giác BMKC là hình thang cân

c. OH cắt AI tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC

d. 

e. H và M đối xứng nhau qua BC

f. Xác định tâm đường tròn nội tiếp 

g. Chứng minh  và 

h. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác AEF và diện tích hình tròn (AEF) không đổi khi A di động trên cung lớn BC

**Lời giải**

a.  nội tiếp và ba điểm H, I, K thẳng hàng

Xét , có: 

- Tứ giác BHCK là hình bình hành  là trung điểm của HK

b. Chứng minh tứ giác BMKC là hình thang cân

Ta có  là hình thang

Lại có BC là đường trung trực của HM , mà 

Hình thang BMKC có hai đường chéo bằng nhau nên là hình thang cân

c. OH cắt AI tại G. Chứng minh G là trọng tâm của tam giác ABC

Ta có G là trọng tâm tam giác AHK 

- Xét  có AI là trung tuyến và  là trọng tâm 

d) 

e) H và M đối xứng nhau qua BC

Ta đi chứng minh CB là đường trung trực của HM

Có:  (phụ );  là phân giác của 

Mà  cân tại C nên CB là đường trung trực của HM

f. Xác định tâm đường tròn nội tiếp 

Ta có  nội tiếp , ta có  nội tiếp ,

 là phân giác 

+) Chứng minh tương tự, ta có FC là phân giác của 

g. Chứng minh MN // EF và 



h. Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác AEF và diện tích hình tròn (AEF) không đổi khi A di động trên cung lớn BC

+) Chứng minh được  là hình bình hành (các cạnh đối song song)

Xét , có OI là đường trung bình của 

O, I cố định nên OI không đổi  không đổi. Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp  không đổi.

+)  nội tiếp đường tròn đường kính AH  nội tiếp đường tròn đường kính AH

 (không đổi).

**Bài 2:** Cho tam giác ABC cân tại A, các đường cao AD, BE cắt nha tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác 

a.  nội tiếp b.  cùng nằm trên một đường tròn

c.  d. DE là tiếp tuyến của đường tròn (O)

e. Tính DE biết DH = 2m, AH = 6cm

**Lời giải**

c)  cân tại A, AD là đường cao  là đường trung trực  là trung điểm của BC

 có ED là đường trung tuyến 

****d) Ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp  là trung điểm của AH 

 cân tại D , mà  (phụ ) , Lại có 

 tại E

e) Ta có .

 vuông tại E .

**Bài 3:** Cho đường tròn (O; R) từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kỳ (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB B là tiếp điểm). Kẻ  , gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB

a.  nội tiếp b.  cùng nằm trên một đường tròn

c.  d.  là hình thoi

e. O, H, M thẳng hàng

f. Tìm quỹ tích điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

**Lời giải**

b) Ta có K là trung điểmcủa NP 

Lại có A, K, B cùng nhìn OM dưới 1 góc 900  nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy 5 điểm cùng nằm trên 1 đường tròn

c) Ta có MA = MB (tính chất hai tiếp tuyến); là đường trung trực của AB 

Xét 

d) 

e)  là hình thoi  thẳng hàng

Vì qua O chỉ có 1 đường thẳng vuông góc với AB

f) Theo chứng minh trên  là hình thoi 

Vậy khi M di động trên d thì H di động nhưng luôn cách A cố định 1 khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R.

**Bài 4:** Cho đường tròn (O;R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Ax và lấy trên tiếp tuyến đó một điểm P sao cho AP > R, từ P kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (O) tại M

a.  nội tiếp b. 

c. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BM tại N. Chứng minh rằng  là hình bình hành

d. Biết AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại I, PN và OM kéo dài cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: I, J, K thẳng hàng

**Lời giải**

a. 

(tính chất hai tiếp tuyến)

Mà hai góc ở vị trí đồng vị  đpcm

b. 

Vậy  là hình bình hành

c) Ta có  mà . Lại có: 

mà  là trực tâm 

+)  là hình chữ nhật



Có PO là phân giác  cân tại I, IK là đường trung tuyến nên là đường cao 

Xét  là trực tâm, mà  thẳng hàng.

**Bài 5:** Cho nửa đường tròn đường kính AB. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyên thứ 3 cắt các tiếp tuyến Ax, By tại C và D. Các đường thẳng AD, BC cắt nhau tại N. Nối MA cắt CO tại D, nối MB cắt OD tại F

a. OEMF là hình chữ nhật b. AC + BD = CD

c. Khi M chuyển động trên nửa đường tròn thì AC. BD không đổi (hoặc lớp B thì )

d. AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD e\*. 

f. Cho  tính AM

g\*. Gọi H là giao điểm của MN với AB, Chứng minh rằng khi M di động trên nửa đường tròn thì đường tròn ngoại tiếp  luôn đi qua điểm cố định

h. Xác định vị trí của điểm M để chu vi  đạt GTNN



**Lời giải**

a) 

 (tính chất hai tiếp tuyến)  là đường trng trực của AM 

Chứng minh tương tự: 

b)

c. Xét  ( không đổi )

d. Gọi I là trung điểm của CD  là tâm đường tròn ngoại tiếp  đường kính CD, bán kính OI

Ta có:  là hình thang, mà I là trung điểm CD  là đường trung bình hình thang ACDB  là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

e) Ta có: 

f) Xét 

Xét 

g) Gọi K là giao điểm của OM và EF 

Xét  đường tròn ngoại tiếp luôn đi O cố định.

h) Ta có ch vi  phải nhỏ nhất (AB cố đinh)  khi CD là khoảng cách giữa Ax và By ta có CD là khoảng cách giữa Ax và By tức là  khi đó CD // AB là trung điểm của cung  .

**Bài 6:** Cho đường ròn (O; R) và (O’; R’) có R > R’ tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O’). DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O’) là F, BD cắt (O’) tại G. CMR:

a. MDGC nội tiếp b. M, D, B, F cùng nằm trên một nửa đường tròn

c.  là hình thoi d. B, E, F thẳng hàng

e. DF, EG, AB đồng quy f. 

g. MF là tiếp tuyến của đường tròn (O’)

**Lời giải**



c. M là trung điểm của AB, mà là trung điểm của DE (đường kính và dây)

nên là hình thoi (hai đường chéo vuông góc tại trung điểm của mỗi đường).

d. Ta có AD // EB (tính chất hình thoi ),  (góc nội tiếp) 

Lại có: , mà qua B chỉ có 1 đường thẳng  thẳng hàng

e. Xét  có C là trực tâm  thẳng hàng.

Vậy DF, EG, AB đồng quy

f.  vuông tại F 

g.  cân tại M 

 cân tại O’ , mà  (phụ  ).

Vậy  là tiếp tuyến của (O’).

**Bài 7:** Cho đường tròn (O), dây AB. C là điểm chính giữa cung nhỏ AB. Lấy các điểm D, E thuộc dây AB (D nằm giữa A, E). Tia CD, CE cắt (O) lần lượt tại P, Q

a. Chứng minh rằng tứ giác PQED nội tiếp được

b. Nếu AD = EB thì tứ giác PQED là hình gì?

c. Chứng minh rằng: 

d. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng AC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADP.

**Lời giải**

a. Xét (O) có C là điểm chính giữa cung nhỏ AB (gt) 

Ta có:  (góc có đỉnh bên trong đường tròn)

Ta có: 

Mà 

Hay   
Xét  nội tiếp đường tròn.

b. Nếu AD = EB thì tứ giác PQED là hình gì?

Gọi H là giao điểm của OC và AB

+) Xét (O) có: OC là đường kính, C là điểm chính giữa cung nhỏ AB (gt)  là trung điểm của dây AB và 

Ta lại có 

+) Vì  là đường trung trực của AB  cân tại C 

+) Vì  là hình thang (2)

Từ (1)(2)  là hình thang cân (dấu hiệu nhận biết)

c. Chứng minh rằng: 

+) Xét (O), có: 

+) Xét 

.

d. Xác định vị trí tương đối của đường thẳng AC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADP

Chứng minh định lý đảo của định lý về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, cụ thể là: Nếu góc BAx (với đỉnh A nằm trên một đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn. Hình minh họa

***Chứng minh:***

Kẻ OH là tia phân giác của 

Vì  cân tại O nên OH đồng thời là đường cao của tam giác AOB    
Xét  vuông tại H có: 

Ta lại có:  là tia tiếp tuyến (O)

***Chứng minh:*** Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác ADP, có: 

Mà  nên theo định lý đảo của định lý về góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ta có AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADP.

**Bài 8:** Cho đường tròn (O) đường kính AB, các điểm C và D thuộc (O) sao cho CD không cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AB, đồng thời AD > AC. Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa cung AC, AD, MN cắt AC, AD lần lượt tại H, I. MD cắt CN tại K

a. Chứng minh rằng tam giác NKD và tam giác MAK cân

b. 

c. So sánh 

****d. Tìm một hệ thức giữa số đo cung AC, số đo AD là điều kiện cần và đủ để AK // ND.

**Lời giải**

a. Chứng minh rằng tam giác NKD và tam giác MAK cân

Xét đường tròn (O), có:





 cân tại N

Xét  có CN, DM là phân giác góc C và D  là giao điểm của 3 đường phân giác  cắt (O) tại P    
Xét (O), có  cân tại M.

b. Chứng minh: 

Xét  có MI là phân giác  nội tiếp 

c. So sánh 

Vì AP là phân giác 

d. Tìm một hệ thức giữa số đo cung AC, số đo AD là điều kiện cần và đủ để AK // ND

 cân tại M có AN là đường phân giác 

Để  là đường kính .

**Bài 9:** Cho điểm B nằm giữa hai điểm A, C. Vẽ đường thẳng d vuông góc với AC tại A. Vẽ (O) đường kính BC và trên đó lấy một điểm M bất kỳ. Tia CM cắt d tại D, tia AM cắt (O) tại điểm thứ hai N. Tia DB cắt (O) tại điểm thứ hai P

a. Chứng minh rằng tứ giác ABMD, APCD nội tiếp được

b. Chứng minh  không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên (O)

c. Tứ giác APND là hình gì? Vì sao

d. Chứng minh trọng tâm G của tam giác MAC chạy trên một đường tròn cố định khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O).

**Lời giải**

a) Chứng minh rằng tứ giác ABMD, APCD nội tiếp được

Ta có: 

 là tứ giác nội tiếp đường tròn.

Ta lại có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

 nội tiếp.

b. Chứng minh CM. CD không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên (O)

Vì    
mà các điểm C, A, B cố định nên CA.CB không đổi khi M di chuyển trên đường tròn (O)

Vậy CM.CD không phụ thuộc vào vị trí điểm M trên đường tròn (O).

c. Tứ giác APND là hình gì? Vì sao

Vì ABMD là tứ giác nội tiếp được đường tròn nên 

Lại có BMNP là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên 

Từ  là hình thang.

d. Chứng minh trọng tâm G của tam giác MAC chạy trên một đường tròn cố định khi điểm M di chuyển trên đường tròn (O).

Gọi I là trung điểm của AC, J là điểm nằm giữa B và I, K là điểm nằm giữa I và C sao cho:



Vì A, B, C là các điểm cố định nên I, J, K là các điểm cố định.

Do G là trọng tâm 

Lại có . Mà 

 thuộc đường tròn đường kính JK cố định

Vậy khi M di chuyển trên đường tròn (O) thì trọng tâm G của tam giác AMC di chuyển trên đường tròn đường kính JK cố định.

**Bài 10:** Cho (O; R) và dây AB < 2R. Lấy điểm C thuộc tia AB sao cho AC > AB. Từ C kẻ hai tiếp tuyến với (O) tại P và K. Gọi I là trung điểm của AB

a. Chứng minh rằng ngũ giác CPIOK nội tiếp đường tròn

b. Chứng minh 

c. Gọi H là trực tâm của tam giác CPK. Tính KH theo R

****d. Giả sử . Chứng minh tia đối của tia BK là tia phân giác của góc CBP.

**Lời giải**

a) Chứng minh rằng ngũ giác CPIOK nội tiếp đường tròn

Xét 

Nội tiếp

Xét 

Nội tiếp

Vậy 5 điểm thuộc 1 đường tròn.

b. Chứng minh: 

Xét ****

****   
c. Gọi H là trực tâm của tam giác CPK. Tính KH theo R

Vì H là trực tâm ****

Mà **** là hình bình hành ****

d. Giả sử AP // CK. Chứng minh tia đối của tia BK là tia phân giác của góc CBP

Gọi ****. Vì tứ giác PBKA nội tiếp (O) nên **** (cùng bù với ****).

Xét (O) có **** (hệ quả của góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Lại có **** (đối đỉnh); ****

Do đó **** tia đối của tia BK là tia phân giác của ****

**Bài 11:** Cho (O; R) và (O’; 2R) tiếp xúc trong tại A. Qua A kẻ hai cát tuyến AMN và APQ với M, P thuộc (O) và N, Q thuộc (O’)

a. Chứng minh rằng ****

b. Chứng minh: MP // NQ

c. Tia O’M cắt (O’) tại S. Gọi H là trực tâm của tam giác SAO’. Chứng minh rằng tứ giác SHO’N nội tiếp được

d. Khi ****. Tính độ dài MP và NQ theo R.

**Lời giải**

a. Chứng minh rằng: 

Ta có A là tiếp điểm chung của (O) và (O’) nên: ****

Mà (O) và (O’) tiếp xúc trong tại A nên các điểm A, O’, O thẳng hàng (đường nối tâm của 2 đường tròn tiếp xúc nhau luôn đi qua tiếp điểm)

**** là trung điểm của O’A

**** và A đối xứng nhau qua O

Mà ****

b. Chứng minh: MP // NQ

Xét **** có **** chắn nửa đường tròn (****) **** vuông tại M ****

Ta có: **** là trung điểm của AN (1)

Tương tự ta có: P là trung điểm của AQ (2)

Từ (1) và (2) **** là đường trung bình của ****

c. Tia O’M cắt (O’) tại S. Gọi H là trực tâm của tam giác SAO’. Chứng minh rằng tứ giác SHO’N nội tiếp được

Gọi K là giao điểm của SH và O’A, do H là trực tâm của **** là đường cao ****

**** vuông tại K.

Xét **** vuông tại M và **** có ****

Lại có: **** cân tại O’ (vì O’N, O’A đều là bán kính của (O’)). ****

Từ (3)(4) **** nội tiếp đường tròn.

d. Khi . Tính độ dài MP và NQ theo R.

Nếu **** là hình chữ nhật **.**

**Bài 12:** Cho tam giác ABC vuông tại A, AB > AC, đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ nửa (O) đường kính BH cắt AB tại E, nửa đường tròn (O’) đường kính HC cắt AC tại F

a. Chứng minh rằng tứ giác AFHE là hình chữ nhật

b. Chứng minh tứ giác BEFC nội tiếp được

c. Chứng minh ****

d. Chứng minh FE là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O) và (O’)

e. Giả sử **** Chứng minh rằng bán kính của nửa đường tròn (O) gấp ba lần bán kính của nửa (O’).

**Lời giải**

a. Chứng minh rằng tứ giác AFHE là hình chữ nhật

****Ta có: **** (góc nội tiếp)

**** (kề bù với góc vuông)

**** là hình chữ nhật.

b. Chứng minh tứ giác BEFC nội tiếp được

Gọi I là giao điểm của AH và FE, ta có tam giác AIE cân tại I (Tính chất hình chữ nhật) ****. Mà **** (cùng phụ với ****) ****

Tứ giác BEFC có góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện nên nội tiếp được.

c. Chứng minh: 

Xét ****

d. Chứng minh FE là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O) và (O’).

Ta có: ****. **** cân tại O ****

****

Mà **** là tiếp tuyến của (O).

Chứng minh tương tự ta có FE là tiếp tuyến của (O’)

Vậy FE là tiếp tuyến chung của (O) và (O’).

e. Giả sử  Chứng minh rằng bán kính của nửa đường tròn (O) gấp ba lần bán kính của nửa (O’).

Gọi  là bán kính của (O); Gọi **** là bán kính của (O’)

****

Trong tam giác BHE vuông tại E ta có ****   
là hình chữ nhật ****

Vì **** Chứng minh tương tự như trên, ta có ****

Vì **** (cùng phụ với****. Chứng minh tương tự ta có: ****

****

Vậy bán kính của nửa (O) gấp ba lần bán kính của nửa (O’).

**Bài 13:** Cho (O) đường kính AB. Đường kính CD thay đổi. Các tia AC, AD cắt tiếp tuyến tại B lần lượt tại P và Q. Gọi M là trung điểm của PQ

a. Chứng minh rằng tứ giác PCDQ nội tiếp

b. Chứng minh: ****

c. Chứng minh:  không đổi khi CD di động

d. Tìm vị trí của CD để PQ nhỏ nhất

e. Tìm tập hợp I của đường tròn ngoại tiếp tam giác PCQ

f. Tìm tập hợp trực tâm tam giác CDQ.

**Lời giải**

a. Chứng minh rằng tứ giác PCDQ nội tiếp

Ta có: ****

Mà: ****  nội tiếp.

b. Chứng minh: 

****

**** vuông tại A, AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên:

****



Mặt khác theo ý a thì tứ giác PCDQ nội tiếp ****

Ta lại có ****

c. Chứng minh:  không đổi khi CD di động

Ta có **** Theo trên ta cũng có ****

Hai tam giác vuông ABP và ABQ có đường cao BC và BD tương ứng. Do đó ta có hệ thức:

**** không đổi khi CD thay đổi.

d. Tìm vị trí của CD để PQ nhỏ nhất

Tam giác APQ vuông tại A có AB là đường cao nên:

**** vuông cân ****

e. Tìm tập hợp I của đường tròn ngoại tiếp tam giác PCQ

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PCQ. Khi đó **** là hình bình hành. Hạ **** là hình chữ nhật **** không đổi nên H là điểm cố định ****

Đường thẳng HI cố định.

Vậy quỹ tich điểm I là đường thẳng đi qua H và vuông góc với đường thẳng AB

f. Tìm tập hợp trực tâm tam giác CDQ.

Gọi K là trực tâm của tam giác CDQ, khi đó ****

Ta có A, K, P thẳng hàng (vì ****)

**** có M là trung điểm của PQ,  nên AM là đường trung bình ****

- Từ K hạ **** không đổi hay N là điểm cố định **** đường thẳng NK cũng cố định. Do đó quỹ tích điểm K là đường thẳng đi qua N và vuông góc với đường thẳng AB.